1 Модели межотраслевого баланса и теория неотрицательных матриц

1.1 Модель межотраслевого баланса Леонтьева

Имеется n "чистых" отраслей, каждая из которых производит единый продукт. $x_i(t)$ — валовый выпуск i-й отрасли в период времени t. $z_{ij}(t)$ — количество продукции i-й отрасли, используемое в j-й отрасли в период времени t в качестве сырья. Считается, что отношение

$$a_{ij}(t) = \frac{z_{ij}(t)}{x_j(t)}$$

слабо зависит от времени, поэтому можно полагать $a_{ij}(t) = a_{ij}$. Матрица $A = \|a_{ij}\| \in \mathbb{R}^{n\times n}$ — матрица прямых затрат Леонтьева.

$w_i(t)$ — конечный выпуск i-й отрасли в период времени t. Если экономика замкнута, то

$$w_i(t) = x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} z_{ij}(t) = x_i(t) - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j(t).$$

Статическая модель Леонтьева:

$$\vec{w} = \vec{x} - A\vec{x}.$$

Динамическая модель Леонтьева:

$$\vec{x}(t) = A\vec{x}(t+1) + \vec{w}(t+1).$$

1.2 Продуктивные матрицы

Определение. Неотрицательная квадратная матрица A называется продуктивной, если $\exists \vec{x} \geqslant 0$: $\vec{x} - A\vec{x} > 0$.

Определение. Будем говорить, что матрица $D = \|d_{ij}\| \in \mathbb{R}^{n\times n}$, удовлетворяющая условиям

$$d_{ij} \leqslant 0, \quad i \neq j, \tag{1}$$

продуктивна, если $\exists x \geqslant 0$: $D\vec{x} > 0$.

Теорема 1 (Критерий продуктивности). *Пусть матрица $D = \|d_{ij}\| \in \mathbb{R}^{n\times n}$ удовлетворяет условию* (1). *Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\exists \vec{x} \geqslant 0$*:* $D\vec{x} > 0$.
2. $\forall \vec{w} \geqslant 0\ \exists \vec{x} \geqslant 0$*:* $D\vec{x} = \vec{w}$.
3. *Все последовательные главные миноры D положительны.*
4. *Все главные миноры D положительны.*

$\vec{p} = (p_1, \ldots, p_n)$ — цены на продукции отраслей, $\vec{\pi} = (\pi_1, \ldots, \pi_n)$ — вектор добавленной стоимости:

$$\pi_i = p_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ji}p_j.$$

Определение. Матрица D, удовлетворяющая условию (1), называется прибыльной, если $\exists \vec{p} \geqslant 0$: $D^T\vec{p} > 0$.

Определение. Матрица D неотрицательно обратима, если $\exists D^{-1} \geqslant 0$.

Теорема 2 (Критерий продуктивности и прибыльности). *Пусть $D = \|d_{ij}\|$ — матрица, удовлетворяющая условию (1), тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\exists \vec{x} \geqslant 0$: $D\vec{x} > 0$ *(продуктивность).*
2. $\forall \vec{w} \geqslant 0$ $\exists \vec{x} \geqslant 0$: $D\vec{x} = \vec{w}$.
3. *Все последовательные главные миноры D положительны.*
4. *Все главные миноры D положительны.*
5. $\exists \vec{p} \geqslant 0$: $D^T\vec{p} > 0$ *(прибыльность).*
6. $\forall \vec{\pi} \geqslant 0$ $\exists \vec{p} \geqslant 0$: $D^T\vec{p} = \vec{\pi}$.
7. *Все последовательные главные миноры D^T положительны.*
8. *Все главные миноры D^T положительны.*
9. *Матрица D неотрицательно обратима.*

Следствие 2.1. *Пусть $A = (a_{ij}) \geqslant 0$. Рассмотрим числа*

$$r_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}, \qquad\qquad s_j = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}.$$

Для продуктивности матрицы $D = E - A$ достаточно выполнения хотя бы одного из условий (условия Брауэра–Соллоу):

1. $\max\limits_i r_i < 1$,
2. $\max\limits_j s_j < 1$.

Теорема 3 (О разложении резольвенты). *Пусть A — неотрицательная квадратная матрица. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Если $\exists (\rho E - A)^{-1} \geqslant 0$, то $\rho > 0$, Ряд Неймана сходится, и справедлива формула*

$$(\rho E - A)^{-1} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{\rho^{k+1}} \tag{2}$$

2. *Если $\rho > 0$ и ряд Неймана сходится, то $\exists (\rho E - A)^{-1} \geqslant 0$, и справедлива формула (2).*

1.3 Теорема Фробениуса–Перрона

Лемма 1. *Пусть $A \geqslant 0$. Тогда*

$$M(A) = \left\{ \rho \;\middle|\; \exists (\rho E - A)^{-1} \geqslant 0 \right\} = (\lambda(A), +\infty),$$

где $\lambda(A) \geqslant 0$.

Лемма 2. *Пусть $A \geqslant 0$ и*

$$\lambda(A) = \inf \left\{ \rho \;\middle|\; \exists (\rho E - A)^{-1} \geqslant 0 \right\}.$$

Тогда $\exists \vec{x}_A \geqslant 0$, $\vec{x}_A \neq 0$: $A\vec{x}_A = \lambda(A)\vec{x}_A$.

Теорема 4 (Фробениус, Перрон). *Пусть $A \geqslant 0$ — квадратная матрица, тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Среди собственных значений матрицы A есть неотрицательные вещественные, и наибольшему из них $\lambda(A)$ соответствует неотрицательный собственный вектор $\vec{x}_A$.*
2. *Матрица $(\rho E - A)$ неотрицательно обратима тогда и только тогда, когда $\rho > \lambda(A)$.*
3. *Если $\vec{y} \geqslant 0$, $\vec{y} \neq 0$ и $A\vec{y} \geqslant \mu\vec{y}$, то $\mu \leqslant \lambda(A)$.*
4. *Если ω — собственное значение матрицы A, то $|\omega| \leqslant \lambda(A)$.*

Определение. Построенное таким образом число $\lambda(A)$ называется числом Фробениуса–Перрона матрицы A, а соответствующий собственный вектор (вообще говоря, не единственный) — вектор Фробениуса–Перрона матрицы A.

Замечание. Число $\lambda^{-1}(A)$ имеет смысл максимально возможного темпа роста в динамической модели Леонтьева.

Свойства чисел Фробениуса–Перрона Пусть $A \geqslant 0$ — квадратная матрица, тогда выполняются следующие свойства:

1. $\lambda(A) = \lambda(A^T)$.
2. $\lambda(\alpha A) = \alpha\lambda(A)$.
3. $\lambda(A^k) = (\lambda(A))^k$.
4. Если $A \geqslant B \geqslant 0$, то $\lambda(A) \geqslant \lambda(B)$. (Если затраты больше, то допустимый темп роста меньше).
5. Если C — главная подматрица матрицы A, то $\lambda(A) \geqslant \lambda(C)$.
6. $\lambda(A) = 0$ тогда и только тогда, когда $\exists k$: $A^k = 0$.

1.4 Неразложимые матрицы

Определение. Пусть $A \geqslant 0$ — квадратная матрица. Она называется разложимой, если существует собственное подмножество $\mathcal{J} \subset \{1, \ldots, n\} = \mathcal{N}$, $\mathcal{J} \neq \emptyset$, $\mathcal{J} \neq \mathcal{N}$, такое, что $a_{ij} = 0$, если $i \notin \mathcal{J}$, а $j \in \mathcal{J}$.

Замечание. Если матрица прямых затрат разложима, то существует подсистема отраслей $\mathcal{J}$, не зависящая от остальных отраслей, то есть не использует их продукцию.

Определение. Квадратная матрица $A \geqslant 0$ называется неразложимой, если она не является разложимой или нулевой матрицей первого порядка.

Лемма 3. *Матрица A (не)разложима тогда и только тогда, когда (не)разложима матрица A^T.*

Определение. Вектор $\vec{x}$ называется полуположительным, если $\vec{x} \geqslant 0$, $\vec{x} \neq 0$, $\vec{x} \not> 0$.

Лемма 4. *Квадратная матрица $A \geqslant 0$ разложима тогда и только тогда, когда существуют число μ и полуположительный вектор $\vec{x}$, такие, что $A\vec{x} \leqslant \mu\vec{x}$.*

Теорема 5 (О неразложимых матрицах). *Пусть матрица $A \geqslant 0$ неразложима. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Число Фробениуса–Перрона $\lambda(A) > 0$, и любой вектор Фробениуса–Перрона $\vec{x}_A > 0$.*

2. *Если $\vec{y}$ — собственный вектор, соответствующий $\lambda(A)$, то $\exists\theta$: $\vec{x}_A = \theta\vec{y}$, то есть вектор Фробениуса–Перрона определен с точностью до множителя.*

Следствие 5.1. *Пусть $A \geqslant 0$ — неразложимая матрица, тогда*

1. *Если $\exists\vec{x} \geqslant 0$, такой, что $(\rho\vec{x} - A\vec{x}) \geqslant 0$ и $(\rho\vec{x} - A\vec{x}) \neq 0$, то матрица $(\rho E - A)$ неотрицательно обратима.*

2. *Если матрица $(\rho E - A)$ неотрицательно обратима, то $\exists(\rho E - A) > 0$.*

Определение. Матрица $A \geqslant 0$ называется устойчивой, если $\exists k > 0$: $A^k > 0$.

Теорема 6 (Об устойчивых матрицах). *Пусть матрица $A \geqslant 0$ неразложима. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1. *Предел*

$$B = \lim_{t\to\infty} \left(\frac{A}{\lambda(A)}\right)^t$$

существует тогда и только тогда, когда матрица A устойчива.

2. *Если предел существует, то столбцы матрицы B являются векторами Фробениуса–Перрона матрицы A (а строки B являются векторами Фробениуса–Перрона матрицы A^T).*

Определение. Матрица $A \geqslant 0$ допускает циклическое разложение, если существуют множества $\mathcal{G}_1, \ldots, \mathcal{G}_s$ $(s \geqslant 2)$, такие, что

1. $\cup_{k=1}^{s} \mathcal{G}_k = \mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$.

2. $\mathcal{G}_k \cap \mathcal{G}_\ell = \emptyset$, $k \neq \ell$, $\forall k, \ell \in \mathcal{N}$.

3. Если $a_{ij} > 0$ и $j \in \mathcal{G}_k$, то $i \in \mathcal{G}_{k+1}$ (считается, что $\mathcal{G}_{s+1} = \mathcal{G}_1$).

Замечание. Если матрица A допускает циклическое разложение, то перестановкой строк и строк и столбцов она приводится к следующему блочному виду:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & & & A_{1,s} \\ A_{2,1} & 0 & & & \\ & A_{3,2} & 0 & & \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & A_{s,s-1} & 0 \end{pmatrix}$$

Теорема 7. *Пусть A — неразложимая матрица. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1. $\exists k > 0$: $A^k > 0$ *(то есть матрица A устойчива).*

2. *Если ω — собственное число матрицы A и $|\omega| = \lambda(A)$, то $\omega = \lambda(A)$, то есть на окружности радиуса $\lambda(A)$ есть только одно собственное число.*

3. *НОД$\{t \mid (A^t)_{11} > 0\} = 1$.*

4. *Матрица A не допускает циклического разложения.*

2 Теория двойственности и ее экономическая интерпретация

2.1 Некоторые сведения из теории линейного программирования

Теорема 8 (О двойственности). *Для того, чтобы задача линейного программирования*

$$\begin{cases} \vec{c}\vec{x} \to \max, \\ A\vec{x} \leqslant \vec{b}, \end{cases}$$

где $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$, $\vec{x}, \vec{c} \in \mathbb{R}^n$, $\vec{b} \in \mathbb{R}^m$, *имела решение, необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача*

$$\begin{cases} \vec{b}\vec{u} \to \min, \\ A^T\vec{u} = \vec{c}, \\ \vec{u} \geqslant 0. \end{cases}$$

При этом, если решения обоих задач существуют, то оптимальные значения функционалов на этих решениях совпадают.

Теорема 9 (О двойственности для задач с ограничениями смешанного типа). *Для того, чтобы задача линейного программирования*

$$\begin{cases} \vec{c}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2 \to \max, \\ A_{11}\vec{x}_1 + A_{12}\vec{x}_2 \leqslant \vec{b}_1, \\ A_{21}\vec{x}_1 + A_{22}\vec{x}_2 = \vec{b}_2, \\ \vec{x}_1 \geqslant 0 \end{cases}$$

имела решение, необходимо и достаточно, чтобы имела решение задача

$$\begin{cases} \vec{b}_1\vec{u}_1 + \vec{b}_2\vec{u}_2 \to \min, \\ A_{11}^T\vec{u}_1 + A_{21}^T\vec{u}_2 \geqslant \vec{c}_1, \\ A_{12}^T\vec{u}_1 + A_{22}^T\vec{u}_2 = \vec{c}_2, \\ \vec{u}_1 \geqslant 0. \end{cases}$$

Лемма 5. *Пусть* $(\vec{x}_1, \vec{x}_2)$ *и* $(\vec{u}_1, \vec{u}_2)$ *являются допустимыми решениями в прямой и двойственной задачах. Тогда для того, чтобы они являлись оптимальными, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия дополняющей нежесткости*

$$\left\langle \vec{u}_1, \vec{b}_1 - A_{11}\vec{x}_1 - A_{12}\vec{x}_2 \right\rangle = 0,$$

$$\left\langle \vec{x}_1, \vec{c}_1 - A_{11}^T\vec{u}_1 - A_{21}^T\vec{u}_2 \right\rangle = 0.$$

Определение. Функцией Лагранжа называется

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{u}_1, \vec{u}_2) = \vec{x}_1\vec{x}_1 + \vec{c}_2\vec{x}_2 + \left\langle \vec{u}_1, \vec{b}_1 - A_{11}\vec{x}_1 - A_{12}\vec{x}_2 \right\rangle + \left\langle \vec{u}_2, \vec{b}_2 - A_{21}\vec{x}_1 - A_{22}\vec{x}_2 \right\rangle.$$

Замечание. Функции Лагранжа прямой и двойственной задач совпадают.

Определение. Набор векторов $\vec{x}_1^*$, $\vec{x}_2^*$, $\vec{u}_1^*$, $\vec{u}_2^*$ называется седловой точкой функции Лагранжа, если для любых векторов $\vec{x}_1$, $\vec{x}_2$, $\vec{u}_1$, $\vec{u}_2$ выполняются неравенства

$$\mathcal{L}(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*) \leqslant \mathcal{L}(\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*, \vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*) \leqslant \mathcal{L}(\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*, \vec{u}_1, \vec{u}_2).$$

Теорема 10 (Кун, Таккер). *Вектор* $(\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*)$ *является оптимальным решением прямой задачи линейного программирования тогда и только тогда, когда существует вектор* $(\vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*)$, *такой, что вектор* $(\vec{x}_1^*, \vec{x}_2^*, \vec{u}_1^*, \vec{u}_2^*)$ *является седловой точкой функции Лагранжа.*

2.2 Трудовая теория стоимости и ее критика

Пусть $\vec{x}$ — вектор валовых выпусков, $\vec{w}$ — вектор конечных выпусков, $A \geqslant 0$ — продуктивная матрица прямых затрат. Вектор $\vec{c} = (c_1, \dots, c_n)$ состоит из компонент, равных трудовым затратам на выпуск единицы валового продукта в каждой отрасли; R — количество трудовых ресурсов. $\vec{\pi}$ — вектор внешних цен.

$$\begin{cases} \vec{\pi}\vec{w} \to \max \\ \vec{x} = A\vec{x} + \vec{w}, & (\vec{p}) \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R, & (s \geqslant 0) \\ \vec{w} \geqslant 0. \end{cases}$$

$\vec{p}$ — вектор цен на продукцию отраслей, s — ставка зарплаты (за единичную затрату труда). Двойственная задача:

$$\begin{cases} sR \to \min, \\ \vec{p} = A^t\vec{p} + s\vec{c}, \\ \vec{p} \geqslant \vec{\pi}, \\ s \geqslant 0. \end{cases}$$

Условия дополняющей нежесткости для прямой и двойственной задач:

$$s(R - \vec{c}\vec{x}) = 0,$$
$$\langle \vec{w}, \vec{\pi} - \vec{p} \rangle = 0,$$

то есть в качестве конечных продуктов ($w_i \neq 0$) будут выступать только те, у которых $\pi_i = p_i$. Дальнейшее исследование задачи показывает, что в качестве конечных производиться будут производиться только те продукты, выпуск которых наиболее выгоден с точки зрения трудовых затрат (чаще всего это один продукт). Это неправильно, так как не все товары взаимозаменяемы. Считается, что товары потребляются комплектами: $\vec{\kappa} = (\kappa_1, \dots, \kappa_n)$ — структура потребительского комплекта. Кроме того, для выпуска продукции необходимо использование капитальных фондов; $\vec{b}$ — вектор фондоемкостей. Собственники нанимают трудящихся в количестве, необходимом для производства. $\vec{\gamma} \geqslant 0$ — структура комплекта трудящихся, R — их число.

Новая задача:

$$\begin{cases} \pi\omega \to \max \\ \vec{x} = A\vec{x} + \vec{w}, & (\vec{p}) \\ \vec{w} \geqslant \omega\vec{\kappa} + R\vec{\gamma}, & (\vec{q}) \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R, & (s \geqslant 0) \\ \vec{b}\vec{x} \leqslant \Phi, & (\mu \geqslant 0) \\ \vec{w} \geqslant 0,\ R \geqslant 0. \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} sR + \mu\Phi \to \min, \\ \vec{p} = A^t\vec{p} + s\vec{c} + \mu\vec{b}, \\ \vec{p}\vec{\kappa} \geqslant \pi, \\ \vec{p}\vec{\gamma} \geqslant s, \\ s \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0. \end{cases}$$

Переменная μ имеет смысл арендной платы за использование капитальных фондов.

По теореме двойственности на оптимальном решении выполняется равенство

$$\pi\omega = sR + \mu\Phi$$

и баланс между трудом и капиталом:

$$\omega\vec{p}\vec{\kappa} = \mu\vec{b}\vec{x},$$
$$R\vec{p}\vec{\gamma} = s\vec{c}\vec{x}.$$

2.3 Оценка эффективности новых технологий

Пусть товары можно производить различными путями. G — матрица выпусков $(n \times m)$, A — матрица прямых затрат при использовании соответствующих технологий $(n \times m)$, $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$ — вектор интенсивности использования технологий.

$$\begin{cases} \pi\omega \to \max, & \\ G\vec{x} = A\vec{x} + \vec{w}, & (\vec{p}) \\ \vec{w} \geqslant \omega\vec{\gamma}, & (\vec{q} \geqslant 0) \\ \vec{b}\vec{x} \leqslant \Phi, & (\mu \geqslant 0) \\ \vec{c}\vec{x} \leqslant R, & (s \geqslant 0) \\ \omega \geqslant 0,\ \vec{x} \geqslant 0. & \end{cases}$$

Новая технология характеризуется вектором выпуска $\vec{g}_H$, затратами $\vec{a}_H$, фондоемкостью b_H и трудоемкостью c_H. Система с новой технологией:

$$\begin{cases} \pi\omega \to \max, & \\ G\vec{x} + \vec{g}_H x_0 = A\vec{x} + \vec{a}_H x_0 + \vec{w}, & (\vec{p}) \\ \vec{w} \geqslant \omega\vec{\gamma}, & (\vec{q} \geqslant 0) \\ \vec{b}\vec{x} + b_H x_0 \leqslant \Phi, & (\mu \geqslant 0) \\ \vec{c}\vec{x} + c_H x_0 \leqslant R, & (s \geqslant 0) \\ \omega \geqslant 0,\ \vec{x} \geqslant 0,\ x_0 \geqslant 0. & \end{cases}$$

Двойственная задача:

$$\begin{cases} sR + \mu\Phi \to \min, \\ G^T\vec{p} - A^T\vec{p} - \mu\vec{b} - s\vec{c} \leqslant 0, \\ \vec{g}_H\vec{p} - \vec{a}_H\vec{p} - \mu b_H - sc_H \leqslant 0, \\ \mu \geqslant 0,\ s \geqslant 0,\ \vec{p} \geqslant 0. \end{cases}$$

Теорема 11. *Для того, чтобы новая технология была неэффективной, необходимо и достаточно, чтобы существовало оптимальное решение двойственной задачи (к исходной системе), такое, что*

$$\vec{g}_H\vec{p}^* - \vec{a}_H\vec{p}^* - \mu^* b_H - s^* c_H \leqslant 0.$$

2.4 Теорема о магистрали Моришимы

Введем квазиметрику

$$\rho(\vec{x}, \vec{y}) = \left\| \frac{\vec{x}}{\|\vec{x}\|} - \frac{\vec{y}}{\|\vec{y}\|} \right\|.$$

Она обладает следующими свойствами:

1. $\rho(\lambda\vec{x}, \mu\vec{y}) = \rho(\vec{x}, \vec{y})$, $\forall \vec{x}, \vec{y} \neq 0$, $\lambda, \mu > 0$.
2. $\rho(\vec{x}, \vec{y}) = 0$ тогда и только тогда, когда $\vec{x} = \lambda\vec{y}$, $\lambda > 0$.
3. Квазиметрика непрерывна по обоим аргументам.
4. Множество $C_\varepsilon(\hat{\vec{x}}) = \left\{ \vec{x} \neq 0 \;\middle|\; \rho(\hat{\vec{x}}, \vec{x}) < \varepsilon \right\}$ является выпуклым конусом при $\varepsilon < 1$.

Определение. Семейство оптимизационных моделей имеет магистраль $\vec{x}^*$, если $\forall \varepsilon > 0$ $\exists T_0(\varepsilon, A) > 0$, $T_1(\varepsilon, A)$, такие, что оптимальные траектории удовлетворяют неравенству

$$\rho(\vec{x}(t), \vec{x}^*) < \varepsilon$$

при $T_0(\varepsilon, A) \leqslant t \leqslant T - T_1(\varepsilon, A)$.

Теорема 12 (Моришима). *Пусть A — устойчивая матрица, $\vec{c} > 0$, $\vec{x}_0 > 0$. Тогда вектор Фробениуса–Перрона матрицы A является магистралью для семейства решений задач*

$$\begin{cases} \vec{c}\vec{x}(T) \to \max, \\ A\vec{x}(t+1) \leqslant \vec{x}(t), \quad t = 0, \dots, T-1, \\ \vec{x}(0) = \vec{x}_0, \\ \vec{x}(t) \geqslant 0, \quad t = 1, \dots, T. \end{cases}$$

3 Теоремы о неподвижных точках

Теорема 13 (Брауэр). *Пусть X — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$, $f\colon X \to X$ — непрерывное отображение. Тогда существует неподвижная точка $\vec{x}^* \in X$ отображения f, то есть $f(\vec{x}^*) = \vec{x}^*$.*

Определение. Отображение $f\colon X \to 2^Y$ полунепрерывно сверху в точке $\vec{x}_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; f(\vec{x}) \subseteq f(\vec{x}_0) + B_\varepsilon(0).$$

Определение. Отображение $f\colon X \to 2^Y$ полунепрерывно снизу в точке $\vec{x}_0$, если

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta(\varepsilon) > 0: \quad \|\vec{x} - \vec{x}_0\| < \delta(\varepsilon) \;\Rightarrow\; f(\vec{x}_0) \subseteq f(\vec{x}) + B_\varepsilon(0).$$

Определение. Отображение $f\colon X \to 2^Y$ называется замкнутым, если для любых двух сходящихся последовательностей $\vec{x}_t \to \vec{x}$, $\vec{y}_t \to \vec{y}$, таких, что $\vec{y}_t \in f(\vec{x}_t)$, выполняется $\vec{y} \in f(\vec{x})$.

Лемма 6. *Пусть $f\colon X \to 2^Y$ обладает следующими свойствами:*

1. *$\forall \vec{x} \in X\colon f(\vec{x})$ — замкнутое множество;*
2. *$f(\vec{X})$ полунепрерывно сверху во всех точках $\vec{x} \in X$.*

Тогда $f(\vec{x})$ — замкнутое отображение.

Лемма 7. *Пусть $f\colon X \to 2^Y$ — замкнутое отображение, Y — компакт. Тогда*

1. *$\forall \vec{x} \in X\colon f(\vec{x})$ — замкнутое множество;*
2. *$f(\vec{x})$ полунепрерывно сверху во всех точках $\vec{x} \in X$.*

Лемма 8. *Пусть $f\colon X \to 2^Y$ — полунепрерывное сверху отображение, X — компакт, и $\forall \vec{x} \in X\colon f(\vec{x})$ — компакт. Тогда множество*

$$f(X) = \bigcup_{\vec{x} \in X} f(\vec{x})$$

является компактом.

Лемма 9. *Пусть f и g — замкнутые отображения, и множество $f(X)$ — компакт. Тогда $g \circ f$ — замкнутое отображение.*

Теорема 14 (Какутани). *Пусть X — выпуклый компакт в $\mathbb{R}^n$ и $f\colon X \to 2^X$. Если*

1. *$\forall \vec{x} \in X\colon f(\vec{x})$ — непустое выпуклое множество;*
2. *$f(\cdot)$ — замкнутое отображение,*

тогда существует неподвижная точка $\vec{x}^*$ отображения $f(\cdot)$, то есть $\vec{x}^* \in f(\vec{x}^*)$.

3.1 Теорема Фань-Цзы и ее следствия

Пусть дана функция $f(\vec{x},\vec{y})$, определенная на $E \times F$, где E и F — подмножества банаховых пространств. Обозначим

$$V^{\#} = \inf_{\vec{x}\in E} \sup_{\vec{y}\in F} f(\vec{x},\vec{y}),$$
$$V^{\circ} = \sup_{\vec{y}\in F} \inf_{\vec{x}\in E} f(\vec{x},\vec{y}),$$
$$V^{\times} = \sup_{K\subseteq F} \inf_{\vec{x}\in E} \sup_{\vec{y}\in K} f(\vec{x},\vec{y}).$$

Лемма 10. $V^{\circ} \leqslant V^{\times} \leqslant V^{\#}$.

Лемма 11. *Пусть E — компакт, и $\forall \vec{y} \in F$ функция $f(\vec{x},\vec{y})$ полунепрерывна снизу по $\vec{x}$, тогда $\exists \hat{\vec{x}} \in E$ такой, что*

$$\sup_{\vec{y}\in F} f(\hat{\vec{x}},\vec{y}) = \inf_{\vec{x}\in E} \sup_{\vec{y}\in F} f(\vec{x},\vec{y}),$$

и $V^{\times} = V^{\#}$.

Лемма 12 (О разбиении единицы). *Пусть E — компакт, и $\{U_i\}_{i=1}^{m}$ его конечное открытое покрытие, то есть*

$$E = \bigcup_{i=1}^{m} U_i. \tag{3}$$

Тогда существует непрерывное разбиение единицы, подчиненное этому покрытию, то есть $\exists\{g_i(\vec{x})\}_{i=1}^{m}$, такие, что

1. $g_i(\vec{x}) \in C(E)$, $i = \overline{1,m}$, $g_i \geqslant 0$;
2. $\operatorname{supp} g_i(\vec{x}) = \operatorname{cl}\{\, \vec{x} \mid g_i(\vec{x}) \neq 0\} \subseteq U_i$, $i = \overline{1,m}$;
3. $\sum_{i=1}^{m} g_i(\vec{x}) \equiv 1$.

Лемма 13. *Справедливо равенство*

$$V^{\#} = \sup_{D\in F^E} \inf_{\vec{x}\in E} f(\vec{x}, D(\vec{x})).$$

Лемма 14. *Пусть выполнены следующие предположения:*

1. *E — компакт, и $\forall \vec{y} \in F$ функция $f(\cdot,\vec{y})$ полунепрерывна снизу по $\vec{x}$ на E;*
2. *F — выпуклое множество, и $\forall \vec{x} \in E$ функция $f(\vec{x},\cdot)$ вогнута по $\vec{y}$ на F.*

Тогда

$$V^{\#} = \sup_{D\in C(E\to F)} \inf_{\vec{x}\in E} f(\vec{x}, D(\vec{x})).$$

Лемма 15. *Пусть выполнены следующие предположения:*

1. *E — компакт, и $\forall \vec{y} \in F$ функция $f(\cdot,\vec{y})$ полунепрерывна снизу по $\vec{x}$ на E;*
2. *F — выпуклое множество, и $\forall \vec{x} \in E$ функция $f(\vec{x},\cdot)$ вогнута по $\vec{y}$ на F.*

Тогда

$$V^{\#} = \inf_{A\in C(F\to E)} \sup_{\vec{y}\in F} f(\vec{A}(\vec{y}),\vec{y}).$$

Теорема 15 (Фань-Цзы). *Пусть E — выпуклый компакт в банаховом пространстве, и выполняются следующие условия:*

1. *$\forall \vec{y} \in E$ функция $\varphi(\cdot, \vec{y})$ полунепрерывна снизу по $\vec{x}$ на E;*
2. *$\forall \vec{x} \in E$ функция $\varphi(\vec{x}, \cdot)$ вогнута по $\vec{y}$ на E.*

Тогда $\exists \vec{x}^* \in E$:

$$\sup_{\vec{y} \in E} \varphi(\vec{x}^*, \vec{y}) \leqslant \sup_{\vec{y} \in E} \varphi(\vec{y}, \vec{y}).$$

Определение. Многозначное отображение $C\colon X \to 2^Y$ (где X, Y — банаховы пространства) является слабо полунепрерывным сверху (снизу), если $\forall \vec{p} \in Y^*$ отображение

$$f(\vec{x}) = \rho(C(\vec{x}), \vec{p}) = \sup_{\vec{y} \in C(\vec{x})} \vec{p}(\vec{y})$$

полунепрерывно сверху (снизу).

Определение. Стандартным симплексом называется множество

$$S^n = \left\{ \vec{x} = (x_1, \ldots, x_n) \geqslant 0 \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = 1 \right\}.$$

Лемма 16 (Гейл–Никайдо–Дебре). *Пусть отображение $C\colon S^n \to 2^{\mathbb{R}^n}$ таково, что*

1. *$C(\vec{x}) \neq \emptyset$, $\forall \vec{x} \in S^n$;*
2. *$C(\cdot)$ слабо полунепрерывно сверху;*
3. *$\forall \vec{x} \in S^n$: $C(\vec{x}) - \mathbb{R}^n_+$ — выпуклое замкнутое множество;*
4. *$\forall \vec{x} \in S^n$: $\rho(C(\vec{x}), \vec{x}) \geqslant 0$ (закон Вальраса).*

Тогда $\exists \vec{x}^* \in S^n$: $C(\vec{x}^*) \cap \mathbb{R}^n_+ \neq \emptyset$.

3.2 Вариационные неравенства

Определение. Вариационным неравенством называется пара $(K, C(\cdot))$, где K — подмножество банахова пространства X, а C — отображение $K \to 2^{X^*}$.

Определение. Решением вариационного неравенства $(K, C(\cdot))$ называется вектор $\hat{\vec{x}} \in K$, для которого существует вектор $\hat{\vec{p}} \in C(\hat{\vec{x}})$, такой, что

$$\left\langle \hat{\vec{p}}, \hat{\vec{x}} \right\rangle \geqslant \left\langle \hat{\vec{p}}, \vec{x} \right\rangle, \quad \forall \vec{x} \in K.$$

Пример. Поиск экстремума

$$f(\vec{x}) \to \max_{\vec{x} \in K},$$

где K — выпуклый компакт, $f(\cdot)$ — вогнутая функция, сводится к вариационному неравенству $(K, C(\cdot))$, где $C(\vec{x}) = \partial^+ f(\vec{x})$.

Пример. Пусть Y — суммарное технологическое множество всех производителей, $P(\vec{x})$ — обратная функция спроса. Тогда решение вариационного неравенства $(Y, P(\cdot))$ является конкурентным равновесием; вектор $\hat{\vec{p}}$ является вектором равновесных цен.

Теорема 16. *Пусть K — выпуклый компакт в банаховом пространстве X, отображение $C\colon K \to 2^{X^*}$ полунепрерывно сверху и имеет непустые выпуклые компактные значения. Тогда существует решение вариационного неравенства $(K, C(\cdot))$.*

3.3 Существование нулей многозначного отображения

Определение. Касательным конусом ко множеству K в точке $\vec{x}$ называется множество

$$T_K(\vec{x}) = \overline{\bigcup_{\lambda>0} \lambda(K - \vec{x})}.$$

Определение. Нормальным конусом ко множеству K в точке $\vec{x}$ называется множество

$$N_K(\vec{x}) = \{\vec{p} \in X \mid \langle \vec{p}, \vec{y} \rangle \leqslant 0, \forall \vec{y} \in T_K(\vec{x})\}.$$

Теорема 17. *Пусть K — выпуклый компакт в гильбертовом пространстве X, $C\colon K \to 2^{X^*}$ слабо полунепрерывно сверху и имеет непустые выпуклые замкнутые значения, кроме того, выполняется условие*

$$\forall \vec{x} \in K: \quad C(\vec{x}) \cap T_K(\vec{x}) \neq \emptyset.$$

Тогда $\exists \vec{x}^* \in K\colon 0 \in C(\vec{x}^*)$.

Лемма 17. *Пусть отображение $C(\vec{x})$ удовлетворяет тангенциальному условию*

$$\vec{x} \in K: \quad C(\vec{x}) \cap T_K(\vec{x}) \neq \emptyset.$$

Тогда выполняется двойственное тангенциальное условие:

$$\forall \vec{x} \in K, \vec{p} \in N_K(\vec{x}) \quad \rho(C(\vec{x}), -\vec{p}) \geqslant 0.$$

Теорема 18 (Лере, Шаудер). *Пусть K – выпуклый компакт с непустой внутренностью в гильбертовом пространстве, отображение $C\colon K \times [0,1] \to 2^X$ слабо полунепрерывно сверху, имеет непустые выпуклые замкнутые значения и удовлетворяет следующим условиям:*

1. *$\forall \vec{x} \in K\colon C(\vec{x}, 0) \cap T_K(\vec{x}) \neq \emptyset$;*
2. *$\forall \lambda \in [0,1)$, $\vec{x} \in \partial K\colon 0 \notin C(\vec{x}, \lambda)$.*

Тогда существует вектор $\vec{x}^* \in K$, такой, что $0 \in C(\vec{x}^*, 1)$.

Следствие 18.1. *Пусть K — выпуклый компакт с непустой внутренностью, $C(\cdot)$, $D(\cdot)$ — слабо полунепрерывные сверху многозначные отображения с непустыми выпуклыми замкнутыми значениями. Если выполняются условия*

1. *$\forall \vec{x} \in K\colon C(\vec{x}) \cap T_K(\vec{x}) \neq \emptyset$;*
2. *$\forall \mu \geqslant 0$, $\vec{x} \in \partial K\colon 0 \notin C(\vec{x}) + \mu D(\vec{x})$.*

Тогда существует вектор $\vec{x}^* \in K$, такой, что $0 \in D(\vec{x}^*)$.

Пусть $S \subseteq T = \{1, \dots, m\}$. Обозначим

$$\Sigma(S) = \left\{ \vec{x} \in \mathbb{R}^m_+ \;\middle|\; \sum_{i=1}^{m} x_i = 1 \right\},$$
$$\Sigma(T) = \{\vec{x} \in \Sigma(S) \mid x_i = 0, \forall i \notin T\}.$$

Теорема 19 (Кнастер, Куратовский, Мазуркевич, Шепли). *Пусть любому набору $T \subseteq S = \{1, \dots, m\}$ сопоставлено подмножество F_T множества $\Sigma(S)$. Если $\forall T \subseteq S$ выполняется условие*

$$\Sigma(T) \subseteq \bigcup_{A \subseteq T} F_A,$$

то существует набор чисел $\{\alpha_T \mid \alpha_T \geqslant 0, T \subseteq S\}$, таких, что

1. $\forall i \in S$: $\sum\limits_{T \ni i} \alpha_T = 1$;

2. $\bigcap\limits_{\{\, A \,\mid\, \alpha_A > 0\}} F_A \neq \emptyset$.

Следствие 19.1 (Кнастер, Куратовский, Мазуркевич). *Пусть имеется семейство $\{F_i\}_{i \in S}$ замкнутых подмножеств $\Sigma(S)$, такое, что $\forall T \subseteq S$ справедливо вложение*

$$\Sigma(T) \subseteq \bigcup_{i \in T} F_i.$$

Тогда существует вектор $\vec{x}^* \in \Sigma(S)$, такой, что

$$\vec{x}^* \in \bigcap_{i=1}^{m} F_i.$$

4 Теория экономического равновесия

4.1 Некоторые понятия теории игр

Определение. Игрой в нормальной форме называется набор

$$\Gamma = \{\mathcal{N}, \{X_i\}_{i=1}^n, \{u_i(\vec{x})\}_{i=1}^n\},$$

где $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ — множество агентов, $X_i = \{x_i\}$ — множество стратегий i-го агента, $u_i(\vec{x})$ — функция полезности, определенная на множестве $X = X_1 \times \ldots \times X_n$.

Обозначим $\vec{x}_{-i} = (x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_n)$.

Определение. Вектор $\vec{x}^* \in X$ называется равновесием по Нэшу, если

$$\forall i \in \mathcal{N} \quad u_i(x_i, \vec{x}^*_{-i}) \leqslant u_i(x^*_i, \vec{x}^*_{-i}).$$

Определение. Вектор $\vec{x}^* \in X$ называется оптимальным по Парето, если не существует другого вектора $\vec{x} \in X$, такого, что $u_i(\vec{x}) \geqslant u_i(\vec{x}^*)$ и $u_{i_0}(\vec{x}) > u_{i_0}(\vec{x}^*)$.

Теорема 20 (Нэш). *Пусть задана игра Γ. Предположим, что*

1. $\forall i \in \mathcal{N}$: *множество стратегий X_i — выпуклый компакт;*

2. $\forall i \in \mathcal{N}$: *функция полезности $u_i(\vec{x})$ непрерывна на X;*

3. $\forall i \in \mathcal{N}$, $\forall \vec{x}_{-i} \in X_{-i}$: *функция полезности $u_i(x_i, \vec{x}_{-i})$ вогнута по x_i на X_i.*

Тогда в игре Γ существует равновесие по Нэшу.

4.2 Модель олигополистической конкуренции Курно

Рассматривается рынок однородных товаров, на котором есть n производителей с номерами $\mathcal{N} = \{1, \ldots, n\}$ и потребитель.

$P(x)$ — обратная функция спроса: по какой цене потребитель согласен купить набор товаров x. Будем считать, что эта функция удовлетворяет следующим предположениям (A1):

- ⋆ $P(x)$ дважды непрерывно дифференцируема;
- ⋆ $P'(x) < 0$: чем больше предлагается товара, тем меньше его цена.
- ⋆ $P(0) > 0$: цена положительна.

* $\exists M > 0$: $P(M) = 0$ — насыщение: больше чем M товара не нужно.

$C_i(x)$ — издержки i-го производителя для производства набора товаров $x \in [0, M]$. Функция издержек удовлетворяет следующим предположениям (A2), $\forall i \in \mathcal{N}$:

* $C_i(x)$ дважды непрерывно дифференцируема;
* $\frac{\mathrm{d}C_i(x)}{\mathrm{d}x} > 0$ — издержки на производство большего числа товаров выше;
* $C_i(x)$ — выпуклая функция, то есть $\frac{\mathrm{d}^2 C_i(x)}{\mathrm{d}x^2} \geqslant 0$.

Стратегия i-го производителя — выпуск продукции $x_i \in [0, M]$. Функция полезности i-го производителя:

$$u_i(\vec{x}) = \underbrace{P\left(\sum_{j=1}^{n} x_j\right) x_i}_{\text{поступления}} - \underbrace{C_i(x_i)}_{\text{издержки}}.$$

Теорема 21. *Пусть выполняются предположения A1 и A2, кроме того, обратная функция спроса является вогнутой. Тогда в модели Курно существует единственное равновесие по Нэшу.*

Монополия Частным случаем является монополия, когда всеми производителями владеет только один агент. Тогда его функция издержек

$$C(x) = \min\left\{ \sum_{i=1}^{n} C_i(x_i) \;\middle|\; \sum_{i=1}^{n} x_i = x, x_i \geqslant 0, i = 1, \dots, n \right\} = (C_1 \oplus \ldots \oplus C_n)(x).$$

Необходимо решать задачу оптимизации

$$P(x)x - C(x) \to \max.$$

Совершенная конкуренция Фирма не может влиять своими действиями на цену и воспринимает ее как должную. Тогда она решает задачу

$$px_i - C_i(x_i) \to \max,$$

считая цену p заданной, в результате чего определяет оптимальный выпуск продукции $\hat{x}_i(p)$. Для равновесия должно выполняться равенство

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} \hat{x}_i(p_c)\right) = P(x_c) = p_c,$$

где p_c — цена совершенной конкуренции, а x_c — выпуск в условиях совершенной конкуренции.

Лемма 18. *Если x_c является выпуском в условиях совершенной конкуренции, то*

$$P(x_c) = \frac{\mathrm{d}C(x_i)}{\mathrm{d}x},$$

то есть предельные издержки устанавливаются на уровне цен.

Теорема 22. *Справедливо неравенство:*

$$x_M \leqslant \sum_{i=1}^{n} x_i^* \leqslant x_c,$$

где x_M — выпуск в условиях монополии, x_c — выпуск в условиях совершенной конкуренции, $\vec{x}^*$ — равновесие по Нэшу.

4.3 Модель Эрроу–Дебре

Имеется ℓ видов товаров, n производителей и m потребителей. Вектор цен $\vec{p} = (p_1, \dots, p_\ell) \in \mathbb{R}^\ell_+ \setminus \{0\}$ несет информацию о потребностях и возможностях отдельных агентов.

Производитель Производитель описывается технологическим множеством Y_k: $y = (y_1, \dots, y_\ell) \in Y_k$ описывает способ производства — затраты $(y_i < 0)$ и выпуск $(y_i > 0)$ товаров. Цель производителя — максимизации прибыли, поэтому его функция полезности:

$$\tilde{\pi}_k(\vec{p}) = \max_{\vec{y} \in Y_k} \vec{p}\vec{y},$$

предложение k-го производителя:

$$\tilde{\psi}_k(\vec{p}) = \operatorname*{Arg\,max}_{\vec{y} \in Y_k} \vec{p}\vec{y}.$$

Суммарное технологическое множество:

$$Y = \sum_{k=1}^{n} Y_k.$$

Потребитель Потребитель описывается функцией полезности $u_i(\vec{x})$, определенной на $\mathbb{R}^\ell_+$. Кроме того, он обладает начальным запасом товаров $\vec{w}^{(i)} \in \mathbb{R}^\ell_+$, и получает часть прибыли от производителей α_{ik}. Таким образом, бюджет потребителя равен

$$I_i(\vec{p}) = \vec{p}\vec{w}^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_{ik}\tilde{\pi}_k(\vec{p}).$$

Потребитель решает задачу о нахождении максимума

$$\tilde{\varphi}_i(\vec{p}) = \operatorname{Arg\,max} \{\, u_i(\vec{x}) \mid \vec{p}\vec{x} \leqslant I_i(\vec{p}), \vec{x} \geqslant 0\}.$$

Определение. Набор векторов $\{\vec{p}^*, \{\vec{y}^*_k\}, \{\vec{x}^*_i\}\}$ называется конкурентным равновесием, если $\vec{p}^* \in \mathbb{R}^\ell_+ \setminus \{0\}$, и

1. $\vec{y}^*_k \in \tilde{\psi}_k(\vec{p}^*)$, $k = 1, \dots, n$, то есть каждый производитель максимизирует свою прибыль;
2. $\vec{x}^*_i \in \tilde{\varphi}_i(\vec{p}^*)$, $i = 1, \dots, m$, то есть каждый потребитель максимизирует свою функцию полезности;
3. выполняется балансовое соотношение
$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}^*_i \leqslant \sum_{i=1}^{m} \vec{w}^{(i)} + \sum_{k=1}^{n} \vec{y}^*_k;$$
4. выполняется условие дополняющей нежесткости (уравнение равновесия между спросом и предложением):
$$\left\langle \vec{p}^*, \sum_{k=1}^{n} \vec{y}^*_k + \sum_{i=1}^{m} (\vec{w}^{(i)} - \vec{x}^*_i) \right\rangle = 0.$$

Теорема 23 (Эрроу, Дебре). *Пусть выполнены следующие предположения:*

P1 Технологические множества Y_j являются выпуклыми и замкнутыми, $0 \in Y_j$.

C1 Функции полезности $u_i(\vec{x})$ вогнуты, непрерывны, ненасыщаемы.

P2 $Y \cap \mathbb{R}^\ell_+ = \{0\}$ *— отсутствие "рога изобилия".*

C2 $\vec{w}^{(i)} > 0$, $i = 1, \dots, m$.

P3 $Y \cap (-Y) = \{0\}$ *— необратимость технологических процессов.*

CP $\sum_{i=1}^m \alpha_{ij} = 1$, $j = 1, \dots, n$, *то есть прибыль полностью распределяется между потребителями.*

Тогда существует конкурентное равновесие.

Определение. Набор векторов $\left\{\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(m)}, \vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(m)}\right\}$ называется распределением, если

1. $\vec{x}^{(i)} \geqslant 0$, $i = 1, \dots, m$;
2. $\vec{y}^{(j)} \in Y_j$, $j = 1, \dots, n$;
3. Выполняется балансовое соотношение:

$$\sum_{i=1}^m \vec{x}_i \leqslant \sum_{i=1}^m \vec{w}^{(i)} + \sum_{j=1}^n \vec{y}^{(j)}.$$

Определение. Распределение $\left\{\hat{\vec{x}}^{(1)}, \dots, \hat{\vec{x}}^{(m)}, \hat{\vec{y}}^{(1)}, \dots, \hat{\vec{y}}^{(m)}\right\}$ называется оптимальным по Парето, если не существует другого распределения $\left\{\vec{x}^{(1)}, \dots, \vec{x}^{(m)}, \vec{y}^{(1)}, \dots, \vec{y}^{(m)}\right\}$, такого, что

1. $u_i(\vec{x}^{(i)}) \geqslant u_i(\hat{\vec{x}}^{(i)})$, $i = 1, \dots, m$;
2. $\exists j \in \{1, \dots, m\}$: $u_j(\vec{x}^{(j)}) > u_j(\hat{\vec{x}}^{(j)})$.

Теорема 24 (Первая теорема теории благосостояния). *Пусть все потребители ненасыщаемы, тогда если* $\left\{\hat{\vec{x}}^{(1)}, \dots, \hat{\vec{x}}^{(m)}, \hat{\vec{y}}^{(1)}, \dots, \hat{\vec{y}}^{(n)}, \hat{\vec{p}}\right\}$ *— конкурентное равновесие, то набор* $\left\{\hat{\vec{x}}^{(1)}, \dots, \hat{\vec{x}}^{(m)}, \hat{\vec{y}}^{(1)}, \dots, \hat{\vec{y}}^{(n)}\right\}$ *— оптимальное по Парето распределение.*

Теорема 25 (Вторая теорема теории благосостояния). *Пусть функции полезности потребителей вогнутые, множество* Y *выпукло и непусто. Если* $\left\{\hat{\vec{x}}^{(1)}, \dots, \hat{\vec{x}}^{(m)}, \hat{\vec{y}}^{(1)}, \dots, \hat{\vec{y}}^{(n)}\right\}$ *— оптимальное по Парето распределение, и существует потребитель* i*, который не насыщается набором* $\hat{\vec{x}}^{(i)}$*, то существует вектор* $\hat{\vec{p}} \in \mathbb{R}^\ell_+ \setminus \{0\}$*, такой, что*

1. $\hat{\vec{y}}^{(j)} \in \operatorname{Arg}\max\limits_{\vec{y} \in Y_j} \vec{p}\vec{y}$, $j = 1, \dots, n$;
2. $\hat{\vec{x}}^{(k)} \in \operatorname{Arg}\min \left\{ \vec{p}\vec{x} \;\middle|\; u_k(\vec{x}) \geqslant u_k(\hat{\vec{x}}^{(k)}), \vec{x} \geqslant 0 \right\}$, $k = 1, \dots, m$.

4.4 Кооперативные игры и модели чистого обмена

Определение. Пусть задано $S = \{1, \dots, m\}$ — множество игроков и отображение $V(\cdot)$, ставящее в соответствие $A \subseteq S$ подмножество $V(A) \subseteq \mathbb{R}^{|A|}$, такое, что

$$V(A) - \mathbb{R}^{|A|}_+ \subseteq V(A).$$

Тогда говорят, что задана кооперативная игра. Множество A называется коалицией игроков, а $V(A)$ имеет смысл достижимых результатов для коалиции A.

Пример (Игра с трансферабельной полезностью).

$$V(A) = \left\{ \vec{x} = (x_i | i \in A) \;\middle|\; \sum_{i \in A} x_i \leqslant f(A) \right\}.$$

Функция $f(A)$ представляет собой общий доход коалиции A.

Пример (Модель чистого обмена). Пусть задан начальный запас товаров i-го агента $\vec{w}^{(i)} \in \mathbb{R}_+^\ell$, $u_i(\vec{x})$ — функция полезности i-го агента (зависит от набора товаров). Пусть $A \subseteq S$, положим

$$\mathcal{R}(A) = \left\{ (\vec{x}^{(i)} | i \in A) \;\middle|\; \vec{x}^{(i)} \in \mathbb{R}_+^\ell, \sum_{i \in A} \vec{x}^{(i)} = \sum_{i \in A} \vec{w}^{(i)} \right\},$$
$$V(A) = \left\{ (v_i | i \in A) \in \mathbb{R}^{|A|} \;\middle|\; \exists (\vec{x}^{(i)} | i \in A) \in \mathcal{R}(A) : \; v_i \leqslant u_i(\vec{x}^{(i)}) \right\}.$$

Определение. Коалиция $A \subseteq S$ блокирует результат $\vec{u} \in \mathbb{R}^{|S|}$, если существует вектор $\vec{v}_A \in V(A)$, такой, что

$$(\vec{v}_A)_i > \vec{u}_i, \quad \forall i \in A,$$

то есть для коалиции A существует лучший результат. Множество

$$B(A) = \pi_A^{-1}(V(A)) - \operatorname{int} \mathbb{R}_+^{|S|}$$

называется множеством результатов, блокируемых коалицией A.

Определение. Ядром кооперативной игры $(S, V(\cdot))$ называется множество

$$C = V(S) \setminus \left(\bigcup_{A \subseteq S} B(A) \right),$$

то есть множество результатов, не блокируемых ни одной коалицией. Ядро можно считать решением кооперативной игры.

Теорема 26. *Пусть* $\forall A, B \subseteq S$ *справедливо неравенство*

$$f(A) + f(B) \leqslant f(A \cup B) + f(A \cap B),$$

тогда в игре с трансферабельной полезностью ядро непусто.

Определение. Набор коалиций $A_1, \ldots, A_k \subseteq S$ называется сбалансированным, если существуют положительные числа $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$, такие, что

$$\forall i \in S \qquad \sum_{\{ j \mid i \in A_j \}} \alpha_j = 1.$$

Это дискретный аналог разбиения единицы.

Определение. Сбалансированный набор коалиций называется минимальным, если в нем не содержится других сбалансированных наборов.

Лемма 19. *Если* $A_1, \ldots, A_k$ *— минимальный сбалансированный набор коалиций, то*

1. *Числа* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *определяются однозначно;*
2. $k \leqslant m$.

Лемма 20. *Для того, чтобы система*

$$\begin{cases} \sum\limits_{i\in S} x_i & = & f(S), \\ \sum\limits_{j\in A} x_j & \geqslant & f(A), \quad \forall A \subseteq S \end{cases}$$

была совместна, необходимо и достаточно, чтобы для любого сбалансированного набора коалиций $A_1, \ldots, A_k$ *с числами* $\alpha_1, \ldots, \alpha_k$ *выполнялось неравенство*

$$\sum_{j=1}^{k} \alpha_j f(A_j) \leqslant f(S).$$

Определение. Кооперативная игра $(S, V(\cdot))$ называется сбалансированной, если для любого сбалансированного набора коалиций $\{A_\alpha\}_{\alpha\in\Lambda}$ справедливо включение

$$\bigcap_{\alpha\in\Lambda} \pi_{A_\alpha}^{-1}(V(A_\alpha)) \subseteq V(S).$$

Теорема 27 (Скарф). *Пусть в кооперативной игре* $(S, V(\cdot))$ *выполнены следующие условия:*

1. $\forall A \subseteq S$ *множество* $V(A)$ *замкнуто;*

2. $\forall A \subseteq S$ *множество*

   $$W(A) = \left\{ \vec{w} \in \mathbb{R}^{|A|} \;\middle|\; \vec{w} \in V(A), \quad \forall i \in A: \; w_i \geqslant V(\{i\}) \right\}$$

   непусто и ограничено;

3. *Игра* $(S, V(\cdot))$ *сбалансирована.*

Тогда ядро игры $(S, V(\cdot))$ *непусто.*

4.5 Ядро экономики в модели чистого обмена

Пусть агенты с номерами $S = \{1, \ldots, m\}$ наделены начальными запасами товаров $\vec{w}^{(i)} \in \mathbb{R}_+^\ell$ и эгоистическими функциями полезности $u_i(\vec{x})$, $\vec{x} \in \mathbb{R}_+^\ell$.

Определение. Распределением товаров будем называть набор векторов $\left\{\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(m)}\right\}$ из $\mathbb{R}_+^\ell$, таких, что

$$\sum_{i=1}^{m} \vec{x}^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} \vec{w}^{(i)}.$$

Множество всех возможных распределений $\mathcal{R}(S) \subseteq \mathbb{R}_+^{lm}$ — выпуклый компакт.

Определение. Ядром экономики чистого обмена называется подмножество $\mathcal{M}$ множества распределений $\mathcal{R}(S)$, такое, что если $\left\{\vec{x}^{(i)}\right\} \in \mathcal{M}$, то для любой коалиции $A \subseteq S$ не существует набора векторов $\left\{ \vec{y}^{(j)} \geqslant 0 \;\middle|\; j \in A \right\}$, такого, что

$$\sum_{j\in A} \vec{y}^{(j)} = \sum_{j\in A} \vec{w}^{(j)}$$

и при этом $\forall j \in A$ верно $u(\vec{x}^{(j)}) < u_j(\vec{y}^{(j)})$.

Определение. Игрой рынка называется кооперативная игра $(S, V(\cdot))$, в которой множество $V(A)$ состоит из таких векторов $\vec{v} \in \mathbb{R}_{|A|}$, для которых существует такой набор векторов $(\vec{y}^{(j)} \in \mathbb{R}^{\ell}_{+} \,|\, j \in A)$, что

$$\sum_{j \in A} \vec{y}^{(j)} = \sum_{j \in A} \vec{w}^{(j)}$$

и при этом $\forall j \in A$ верно $v_j \leqslant u_j(\vec{y}^{(j)})$.

Лемма 21. *Если распределение $\{\vec{x}^{(i)}\}$ принадлежит ядру экономики $\mathcal{M}$, то вектор $\{u_i(\vec{x}^{(i)})\}$ принадлежит ядру кооперативной игры рынка. Если $(v_1, \ldots, v_m)$ принадлежит ядру игры рынка, то существует набор $\vec{x}^{(i)}$ из ядра экономики, такой, что $v_i \leqslant u_i(\vec{x}^{(i)})$, $\forall i \in S$.*

Лемма 22. *Пусть функции полезности $u_j(\vec{x})$ являются вогнутыми при всех $j \in S$. Тогда игра рынка является сбалансированной кооперативной игрой.*

Теорема 28. *Пусть функции полезности $u_j(\vec{x})$ являются вогнутыми и непрерывными. Тогда ядро экономики обмена непусто.*

4.6 Нечеткие ядра в играх рынка

Определение. Неотрицательный ненулевой вектор $\vec{a} = (\alpha_1, \ldots, \alpha_m)$ определяет нечеткую коалицию, которая блокирует распределение $(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(m)}) \in \mathcal{R}(S)$, если существует набор векторов $(\vec{y}^{(1)}, \ldots, \vec{y}^{(m)})$ из $\mathbb{R}^{\ell}_{+}$, такой что

1. Если $\alpha_i > 0$, то $u_i(\vec{y}^{(i)}) > u_i(\vec{x}^{(i)})$;
2. $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{y}^{(i)} = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \vec{w}^{(i)}$.

Определение. Нечетким ядром игры рынка называется множество распределений W, которое не блокируется ни одной нечетной коалицией.

Лемма 23. *Для того, чтобы распределение $(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(m)}) \in \mathbb{R}(S)$ принадлежало нечеткому ядру, необходимо и достаточно, чтобы существовал ненулевой вектор цен $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_\ell)$, такой, что $\forall i \in S$ и $\vec{y}^{(i)} \in \mathbb{R}^{\ell}_{+}$, $u_i(\vec{x}^{(i)}) < u_i(\vec{y}^{(i)})$, выполнялось неравенство*

$$\vec{p}\vec{y}^{(i)} \geqslant \vec{p}\vec{w}^{(i)}. \tag{4}$$

Теорема 29. *Пусть $\vec{w}^{(i)} > 0$, $i = 1, \ldots, m$. Для того, чтобы распределение $(\vec{x}^{(1)}, \ldots, \vec{x}^{(m)})$ принадлежало нечеткому ядру W, необходимо и достаточно, чтобы существовал ненулевой вектор цен $\vec{p} = (p_1, \ldots, p_\ell)$, такой, что*

1. *$\vec{p}\vec{x}^{(i)} = \vec{p}\vec{w}^{(i)}$, $i = 1, \ldots, m$ (бюджетное равенство);*
2. *если $\vec{y}^{(i)} \geqslant 0$, $\vec{p}\vec{y}^{(i)} \leqslant \vec{p}\vec{w}^{(i)}$, то $u_i(\vec{x}^{(i)}) \geqslant u_i(\vec{y}^{(i)})$.*

(То есть распределение $\vec{x}$ должно быть конкурентным равновесием).

4.7 Ящики Эджворта и Баласко

Рассматриваются два агента, обладающие двумя типами товаров. Пусть $\vec{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \geqslant 0$ — начальный запас 1-го агента, $\vec{\Omega} = (\Omega_1, \Omega_2) > 0$ — суммарный запас товаров. Начальный запас второго агента равен $\vec{\Omega} - \vec{\omega}$.

Пусть функции полезности агентов $u(\vec{x})$ и $v(\vec{x})$ монотонно возрастают и строго вогнуты:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 u}{\partial {x_1}^2} & \frac{\partial^2 u}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2 u}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 u}{\partial {x_2}^2} \end{pmatrix} < 0.$$

Результат обмена для первого игрока $\vec{x} = (x_1, x_2)$, для второго — $(\vec{\Omega} - \vec{x}) = (\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2)$.

В точке ядра линии уровня функций u и v должны касаться, то есть их градиенты коллинеарны:

$$f(x_1, x_2) = \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_1} \frac{\partial v(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2)}{\partial y_2} - \frac{\partial v(\Omega_1 - x_1, \Omega_2 - x_2)}{\partial y_1} \frac{\partial u(x_1, x_2)}{\partial x_2} = 0. \qquad (5)$$

Лемма 24. *Уравнение (5) описывает непрерывно дифференцируемую кривую, причем касательная к этой кривой не совпадает с общей касательной к линиям уровня функций полезности, проходящими через эту точку.*

Пусть $(\xi_1(t), \xi_2(t))$ — решение (5). Положим

$$\vec{\pi}(t) = (\pi_1(t), \pi_2(t)) = \left(\frac{\frac{\partial u(\xi_1(t), \xi_2(t))}{\partial x_1}}{\frac{\partial u(\xi_1(t), \xi_2(t))}{\partial x_1} + \frac{\partial u(\xi_1(t), \xi_2(t))}{\partial x_2}}, \frac{\frac{\partial u(\xi_1(t), \xi_2(t))}{\partial x_2}}{\frac{\partial u(\xi_1(t), \xi_2(t))}{\partial x_1} + \frac{\partial u(\xi_1(t), \xi_2(t))}{\partial x_2}} \right).$$

Лемма 25. *Поверхность $\mathcal{E}$, описываемая уравнением*

$$(\xi_1(t) + \pi_2(t)s, \xi_2(t) - \pi_1(t)s, \pi_1(t))$$

непрерывно дифференцируема, и на каждой ее образующей ($t = const$) имеется не более одной точки, в которой касательная плоскость вертикальна.

Определение. Проекции точек поверхности $\mathcal{E}$, в которых касательная к плоскости вертикальна, называются характеристическими точками.

Лемма 26. *Характеристические точки образуют непрерывную кривую. Если в окрестности какой-либо характеристической точки эта кривая дифференцируема, то касательная к ней совпадает с общей касательной линий уровня функций полезности, проходящих через эту точку.*

Лемма 27. *Пусть $D_1, \ldots, D_k$ — касательные к линиям уровня функций полезности в тех точках, в которых эта кривая пересекает ящик Эджворта. Пусть U — область в ящике Эджворта, не содержащая характеристических точек и точек, принадлежащих прямым $D_1, \ldots, D_k$. Тогда существует конечное число функций $\vec{y}_1(\vec{x}), \ldots, \vec{y}_r(\vec{x})$, которые определяют точки поверхности Баласко, проектирующиеся в $\vec{x}$.*